

CORRECTION

EXERCICE n°33 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

Partie A : étude d'une fonction

1. Limite de f en $-\infty$:

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty \end{array}} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On a :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x} = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}.$$

Alors :

$$f(x) = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} + 2 \times \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + 2 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} + \frac{1}{e^x}.$$

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Cela signifie que la courbe représentant la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

3. On a :

$$f'(x) = 2 \times 1 \times (x+1) \times e^{-x} + (x+1)^2 \times (-1) \times e^{-x} = e^{-x} (x+1) [2 - (x+1)]$$

$$f'(x) = e^{-x} (x+1)(1-x) = (1-x^2)e^{-x}.$$

4. Une équation de la tangente (T) est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = x+1.$$

5. Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0

Conclusion :

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et croissante sur $[-1; 1]$.

6. Sur $[1; 3]$:

- La fonction f continue ;
- La fonction f est décroissante ;
- $f(1) > 1$ et $f(3) < 1$;

Conclusion :

L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique x_0 sur $[1; 3]$.

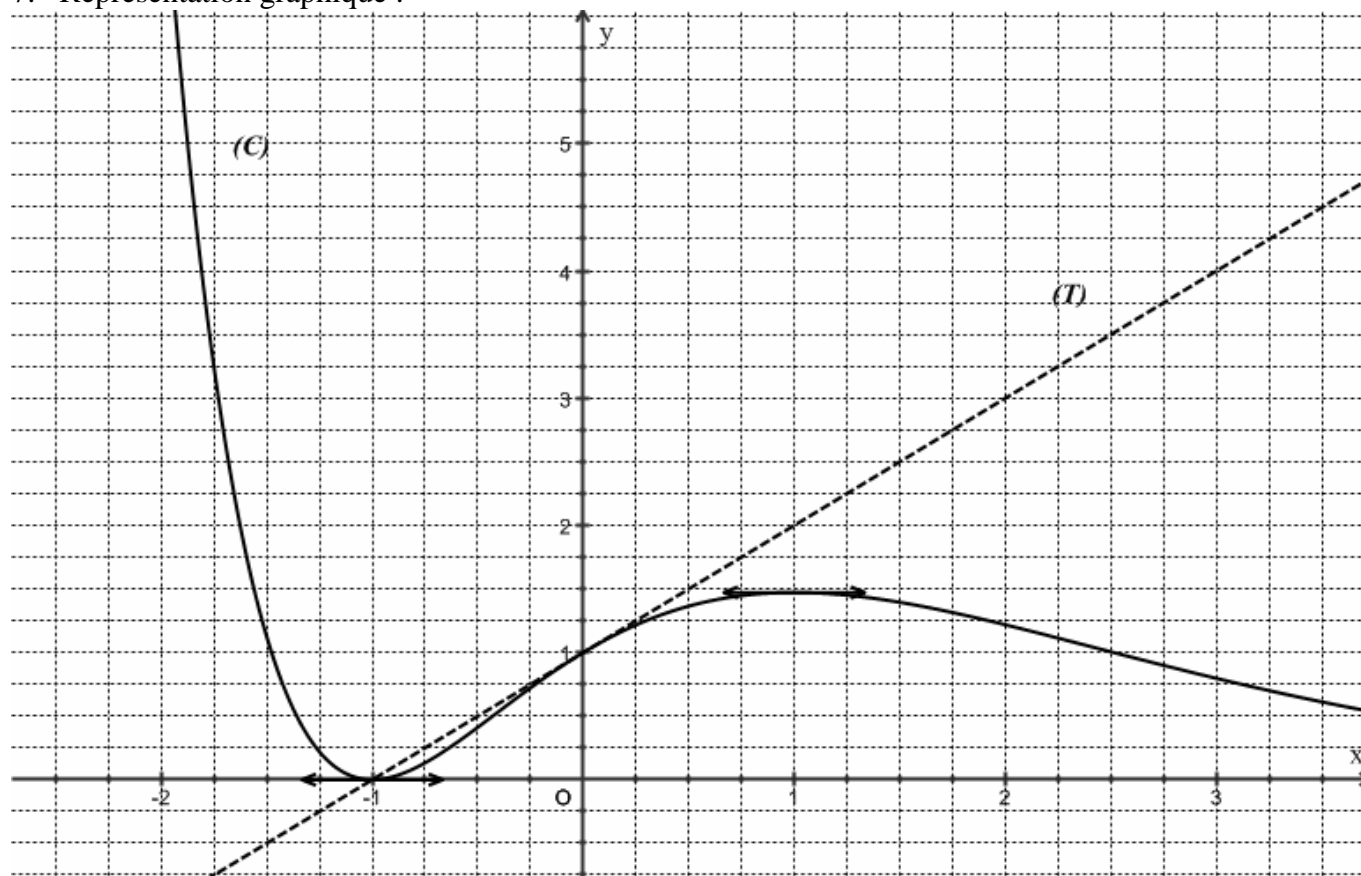
On a :

$$2 < x_0 < 3$$

$$2,5 < x_0 < 2,6$$

$$2,51 < x_0 < 2,52.$$

7. Représentation graphique :



Partie B : étude de la fonction inverse

1. D'après la question A.5. et sachant que $f(0) = 1$, on a $f(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

2. La fonction g est bien définie sur $[0; +\infty[$ car $f(x) > 0$.

On a :

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1 ; g(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{e}{4} \text{ et } g(x_0) = \frac{1}{f(x_0)} = 1.$$

3. Limite de g en $+\infty$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

4. Tableau de variation de la fonction g :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	1	$\frac{e}{4}$	$+\infty$

Conclusion :

La fonction g est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.