CORRECTION

<u>EXERCICE n°29</u> :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}-5e^{x}+4$.

1. On résout l'équation $f(x)=0$:

   On pose $X=e^{x}$ et l'équation devient $X^{2}-5X+4=0$ d'où $X=1$ *ou* $X=4$ donc $e^{x}=1$ *ou* $e^{x}=4$ soit $S=\{0;2\ln 2\}$.

   Donc il existe deux points d'intersection A et B de la courbe (C) et l'axe des abscisses qui ont pour abscisses respectives 0 et 2ln2.

2. Limite de f en $-\infty$:
   On a :
   $$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}\right)=0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x)=4.$$
   Cela signifie que la droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$.

   On a :
   $$e^{x}\left(e^{x}-5\right)+4=e^{2x}-5e^{x}+4=f(x).$$

   Limite de f en $+\infty$:
   On a :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-5\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

3. On a :
   $$f'(x)=2e^{2x}-5e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-5\right).$$

   Résolution de l'inéquation $2e^{x}-5\geq 0$:
   $$2e^{x}-5\geq 0\Leftrightarrow e^{x}\geq\frac{5}{2}\Leftrightarrow x\geq\ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

   Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion :

La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty;\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right]$ et croissante sur $\left[\ln\left(\frac{5}{2}\right);+\infty\right[$.

4. Représentation graphique de la fonction f :