CORRECTION

EXERCICE n°27 :

a. Soit $f(x)=2x+3-e^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=2-2e^{2x+1}=2\left(1-e^{2x+1}\right)$$

Signe de la dérivée de la fonction f :

$$1-e^{2x+1}\geq 0 \Leftrightarrow -e^{2x+1}\geq -1 \Leftrightarrow e^{2x+1}\leq 1 \Leftrightarrow 2x+1\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \quad si \quad x=-\dfrac{1}{2} \\ f'(x)>0 \quad si \quad x<-\dfrac{1}{2} \\ f'(x)<0 \quad si \quad x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

b. Soit $f(x)=\left(x^2-3x+1\right)e^{3x+2}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=(2x-3)e^{3x+2}+\left(x^2-3x+1\right)\times 3e^{3x+2}=\left(3x^2-7x\right)e^{3x+2}$$

Signe de la dérivée de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
$(3x^2-7x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\begin{cases} f'(x)=0 \quad si \quad x=0 \quad ou \quad x=\frac{3}{7} \\ f'(x)<0 \quad si \quad x\in \left]0;\frac{3}{7}\right[\\ f'(x)>0 \quad si \quad x\in \left]-\infty;0\right[\cup \left]\frac{3}{7};+\infty\right[\end{cases}.$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{7}\right)$	$\nearrow$	

$f(0)=e^2$

$f\left(\frac{3}{7}\right)=-\frac{5}{9}e^9$.

Conclusion :

La fonction f est décroissante sur $\left[0;\frac{3}{7}\right]$ et croissante sur $\left]-\infty;0\right]\cup\left[\frac{3}{7};+\infty\right[$.

c. Soit $f(x)=\frac{e^x}{2+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{e^x\times(2+e^{-x})-e^x\times(-e^{-x})}{(2+e^{-x})^2}=\frac{2(1+e^x)}{(2+e^{-x})^2}$$

Signe de la dérivée de la fonction f :

$f'(x)>0 \quad si \quad x\in\mathbb{R}$.

Variation de la fonction f :

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

d. Soit $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\left(e^x+1\right)-e^{2x}\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{3x}+2e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}\left(e^x+2\right)}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

Signe de la dérivée de la fonction f :

$f'(x)>0 \quad si \quad x\in\mathbb{R}$.

Variation de la fonction f :

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.