CORRECTION

EXERCICE n°26 :

a. Soit $f(x)=(1+x)e^{1-2x}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=1\times e^{1-2x}+(1+x)\times(-2)e^{1-2x}=(-2x-1)e^{1-2x}$$

Signe de la dérivée de la fonction f :

$$\begin{cases} f'(x)=0 & si \quad x=-\dfrac{1}{2} \\ f'(x)>0 & si \quad x<-\dfrac{1}{2} \\ f'(x)<0 & si \quad x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$		

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{2}.$$

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

b. Soit $f(x)=x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=2x\times e^{-x}+x^2\times(-1)e^{-x}=x(-x+2)e^{-x}$$

Signe de la dérivée de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+2)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\begin{cases} f'(x)=0 & si \quad x=0 \quad ou \quad x=2 \\ f'(x)>0 & si \quad x\in \left]0;2\right[\\ f'(x)<0 & si \quad x\in \left]-\infty;0\right[\cup \left]2;+\infty\right[\end{cases}.$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	

$$f(2)=4e^{-2}.$$

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $[0;2]$ et décroissante sur $\left]-\infty;0\right] \cup \left[2;+\infty\right[$.

c. Soit $f(x)=e^{2x}-e^{x}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$$

Signe de la dérivée de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$\left(2e^{x}-1\right)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$$\begin{cases} f'(x)=0 & si \quad x=-\ln 2 \\ f'(x)>0 & si \quad x\in \left]-\ln 2;+\infty\right[\\ f'(x)<0 & si \quad x\in \left]-\infty;-\ln 2\right[\end{cases}.$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-\ln 2)$	$\nearrow$	

$$f(-\ln 2) = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $[-\ln 2;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;-\ln 2]$.

d. Soit $f(x) = 3x - 1 - e^{-x+2}$ sur $\mathbb{R}$:

Calcul de la dérivée de la fonction f :

$f'(x) = 3 + e^{-x+2}$

Signe de la dérivée de la fonction f :

$f'(x) > 0 \quad si \quad x \in \mathbb{R}$.

Variation de la fonction f :

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.