# CORRECTION

**<u>EXERCICE n°19</u> :**

Soit $f(x) = ax + b - \dfrac{4e^x}{e^x + 2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. On a :

$$\begin{cases} f(\ln 2) = \ln 2 \\ f'(\ln 2) = 0 \end{cases} \text{ et } f'(x) = a - \frac{4e^x\left(e^x+2\right) - 4e^x \times e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = a - \frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}.$$

Alors :

$$\begin{cases} f(\ln 2) = \ln 2 \\ f'(\ln 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ln 2 + b - \dfrac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2} = \ln 2 \\ a - \dfrac{8e^{\ln 2}}{\left(e^{\ln 2}+2\right)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ln 2 + b - \dfrac{4\times 2}{2+2} = \ln 2 \\ a - \dfrac{8\times 2}{\left(2+2\right)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ln 2 + b - 2 = \ln 2 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Soit :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}.$$

2. Etude des variations de la fonction $f$ :

De la question 1., on a : $f'(x) = a - \dfrac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = 1 - \dfrac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}$.

Alors :

$$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{\left(e^x+2\right)^2 - 8e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 8e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}.$$

Tableau de variation de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | | $\nearrow$ | | |

Conclusion :

La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.