CORRECTION

EXERCICE n°16 :

Soit $f(x) = -x+1-e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

Et :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}(-e^x)=0.$$

Cela signifie que la droite d'équation $y=-x+1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$.

2. Sens de variation de la fonction f :

La fonction $x\mapsto -x+1$ est une fonction affine décroissante.
La fonction exponentielle est croissante donc la fonction $x\mapsto -e^x$ est une fonction décroissante.
Conclusion :
La fonction f est la somme de deux fonctions décroissantes donc elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Sur $\mathbb{R}$:
   - La fonction f est continue ;
   - La fonction f est décroissante ;
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty<0$;

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$, autrement dit la courbe représentant la fonction f coupe l'axe des abscisses en un point unique A.

Représentation graphique de la fonction f :