CORRECTION

EXERCICE n°2 :

Dans un repère orthonormal de l'espace $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points suivants :

$A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$ et $C(0;1;2)$.

1. Montrons que ABC est un triangle rectangle :

   On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. $1\times(-1)+1\times1+(-2)\times0=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et ont la même origine donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

2. Vérifions que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) :

   $1\times1+1\times1+(-2)\times1=0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

   $-1\times1+1\times1+0\times1=0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

   Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Equation cartésienne de ce plan (ABC) :

   $M(x;y;z)\in(ABC)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux c'est à dire :

   $(x-1)\times1+y\times1+(z-2)\times1=0 \Leftrightarrow x+y+z=3$.

   Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+y+z=3$.

4. Calcul des coordonnées des points E, F et G intersections du plan (ABC) avec les droites $\left(O;\vec{i}\right)$, $\left(O;\vec{j}\right)$ et $\left(O;\vec{k}\right)$:

   - Les coordonnées du point E, intersection du plan (ABC) et de la droite $\left(O;\vec{i}\right)$ vérifient :

     $\begin{cases}x_E+y_E+z_E=3\\y_E=0\\z_E=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=3\\y_E=0\\z_E=0\end{cases}\Leftrightarrow E(3;0;0)$.

   - Les coordonnées du point F, intersection du plan (ABC) et de la droite $\left(O;\vec{j}\right)$ vérifient :

     $\begin{cases}x_F+y_F+z_F=3\\x_F=0\\z_F=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=0\\y_F=3\\z_F=0\end{cases}\Leftrightarrow F(0;3;0)$.

   - Les coordonnées du point G, intersection du plan (ABC) et de la droite $\left(O;\vec{k}\right)$ vérifient :

     $\begin{cases}x_G+y_G+z_G=3\\x_G=0\\y_G=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=0\\y_G=0\\z_G=3\end{cases}\Leftrightarrow G(0;0;3)$.

5. Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = 3\vec{u}$.

$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 3 \\ y_D - 0 = 3 \\ z_D - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 3 \\ z_D = 5 \end{cases} \Leftrightarrow D(4;3;5).$$

6. Montrons que les triangles *ABD* et *ACD* sont rectangles en *A* :

   $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{AD} = 3\vec{u}$ l'est aussi. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est alors orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, de plus ils ont tous les trois la même origine donc les triangles *ABD* et *ACD* sont rectangles en *A*.

   Montrons que *BCD* n'est pas rectangle :

   $BC^2 = 8$, $BD^2 = 33$ et $CD^2 = 29$ alors $BC^2 + CD^2 \neq BD^2$ donc le triangle *BCD* n'est pas rectangle.