CORRECTION

EXERCICE n°3 :

PARTIE A

g est la fonction définie sur $[0;70]$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100.$$

1. Etudions les variations de la fonction g et dressons son tableau de variation :

   On a $g'(x) = 3x^2 - 1200$ d'où :

x	0		20		70
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-100	$\searrow$	-16100	$\nearrow$	258900

2. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[20;40]$ et donnons une valeur approchée de α à l'unité près :

   Sur $[20;40]$:

   - La fonction g est continue ;
   - La fonction g est strictement croissante ;
   - $g(20) < 0$ et $g(40) = 15900 > 0$;

   Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[20;40]$.

   On a :

   $$\left.\begin{array}{l} 34 < \alpha < 35 \\ 34,6 < \alpha < 34,7 \end{array}\right. \text{ donc } \alpha = 35 \text{ à l'unité.}$$

3. Déduisons le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0;70]$:

x	0		α		70
$g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

f est la fonction définie sur $]0;70]$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

(C) est la courbe représentative dans un repère orthogonal (*unités : 1 cm pour 5 en abscisses et 1 cm pour 20 en ordonnées*)

1. Montrons que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, où g est la fonction définie à la partie A :

   On a :

   $$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2} = \frac{(x+50)\times x^2 + 1200x + 50}{x^2} = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x^2}.$$

   Alors :

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+100x+1200\right)\times x^2-\left(x^3+50x^2+1200x+50\right)\times 2x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{x\left[\left(3x^2+100x+1200\right)\times x-\left(x^3+50x^2+1200x+50\right)\times 2\right]}{x^4}=\frac{g(x)}{x^3}.$$

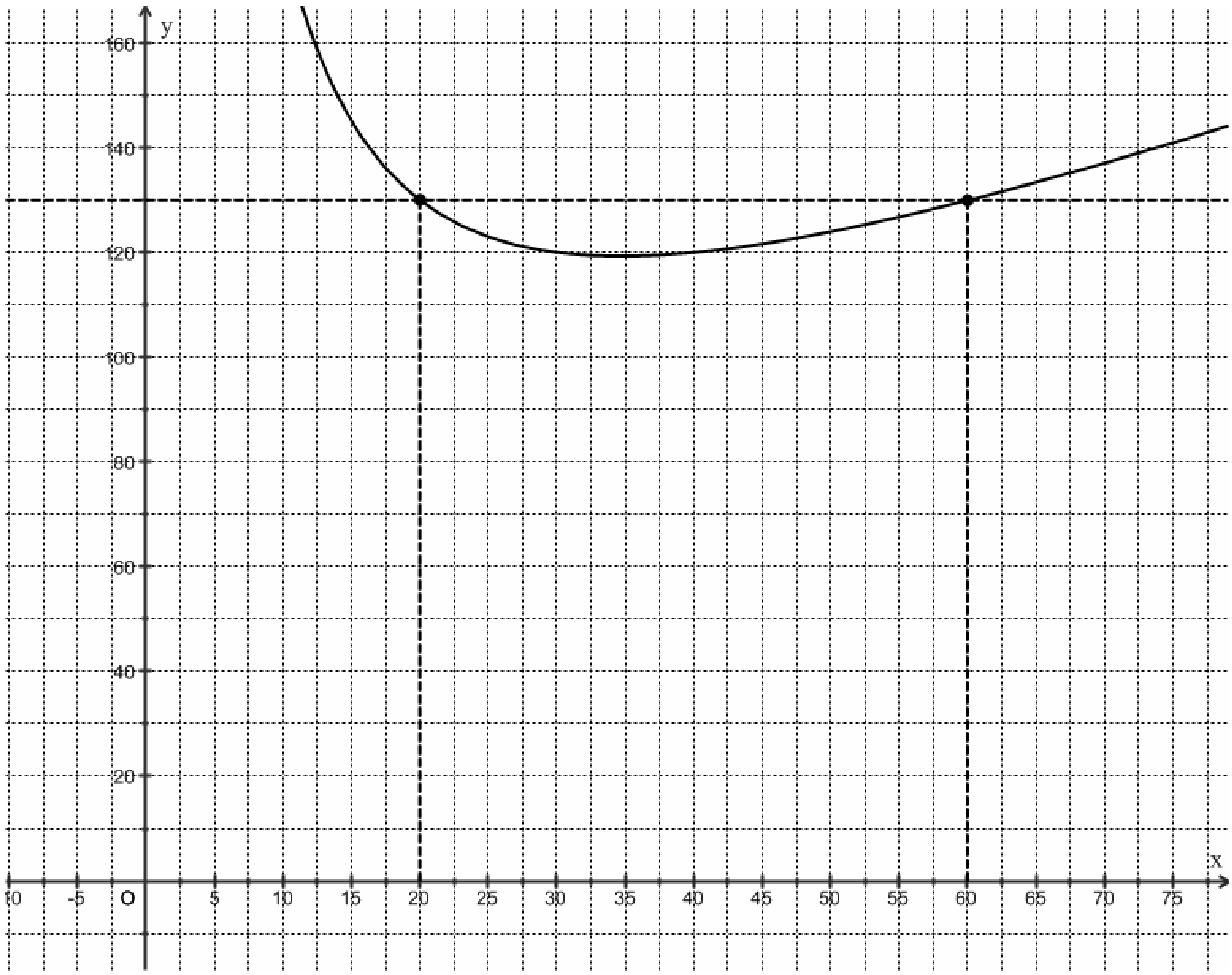
2. Etudions les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation :
   Sur $]0;70]$, $x^3>0$ alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
   D'où le tableau suivant :

x	0		α		70
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\frac{13441}{98}$

Avec

$$f(\alpha)=f(35)=\frac{5847}{49}=119,327.$$

3. Tracé la courbe (C) : voir page suivante.
4. Résolvons graphiquement l'équation $f(x)=130$. On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près :
   Les solutions de cette équation sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est égale à 130 soit : $S=\{20;60\}$.



PARTIE C

Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit , exprimée en centaines d'unités, est défini sur $]0;70]$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x},$$

$C(x)$ étant exprimé en milliers d'euros.

Le coût moyen de fabrication par centaine d'objets est donc défini par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1. Pour tout $x > 0$,

   $$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{= \dfrac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}}{x} = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x^2} = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2} = f(x).$$

   (0,5 pt)
2. Déterminons la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimal. ***(1 pt)***
   D'après le tableau de variation de la partie B, il suffit de produire 35 centaines d'objets.
3. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 130 000 €.
   Déterminons graphiquement, à la centaine près, le nombre minimal et le nombre maximal d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable : ***(1 pt)***
   D'après le graphique précédent, l'entreprise doit fabriquer entre 20 et 60 centaines d'objets.